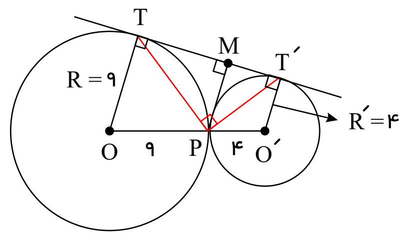
پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۴ نکته: $T\hat{P}T' = ۹۰^\circ$ بوده و مثلث TPT' قائم‌الزاویه است.

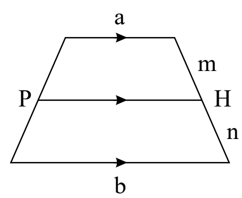
طول مماس مشترک خارجی این دو دایره مماس خارج برابر است با:

$$TT' = ۲\sqrt{RR'} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{۹\times ۴} = ۱۲$$



یادآوری: در ذوزنقهٔ شکل زیر اگر PH موازی قاعده‌های ذوزنقه باشد، داریم:

$$PH = \frac{a\cdot n + b\cdot m}{m+n}$$



در نتیجه در ذوزنقهٔ $OO'T'T$ داریم:

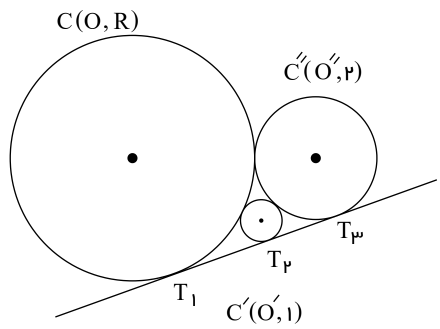
$$PH = \frac{۴\times ۹ + ۹\times ۴}{۴+۹} = \frac{۷۲}{۱۳} \Rightarrow S_{PTT'} = \frac{۱}{۲}\times TT'\times PH = \frac{۱}{۲}\times ۱۲\times \frac{۷۲}{۱۳} = \frac{۴۳۲}{۱۳}$$

۲ گزینه ۱ می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج بر شعاع‌های R و R' برابر است با: $TT' = ۲\sqrt{RR'}$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} T_۱T_۲ = ۲\sqrt{R} \\ T_۲T_۳ = ۲\sqrt{۲} \\ T_۱T_۳ = ۲\sqrt{۲R} \end{cases} \xrightarrow{T_۱T_۳ - T_۱T_۲ = T_۲T_۳} ۲\sqrt{۲R} - ۲\sqrt{R} = ۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۲} \sqrt{۲R} - \sqrt{R} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۲} - ۱)\sqrt{R} = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{R} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲} - ۱} = ۲ + \sqrt{۲} \Rightarrow R = ۶ + ۴\sqrt{۲}$$



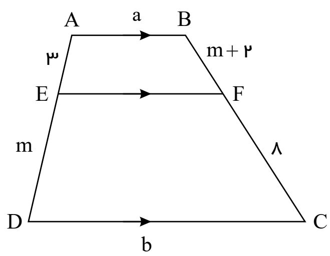
۳ گزینه ۳

چون چهارضلعی محیطی است، بنابراین داریم:

$$a + b = AD + BC \Rightarrow a + b = ۲m + ۱۳ \quad (۱)$$

$$AB || EF || CD \Rightarrow \frac{۳}{m} = \frac{m+۲}{۸} \Rightarrow m^۲ + ۲m - ۲۴ = ۰ \Rightarrow m = \begin{cases} -۶ < ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ ۴ \quad \text{ق ق} \xrightarrow{\text{طبق } (۱)} a + b = ۲۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ذوزنقه} : S = \frac{۱}{۲}(a+b)\times h \Rightarrow ۴۲ = \frac{۱}{۲}\times ۲۱\times h \Rightarrow h = ۴$$



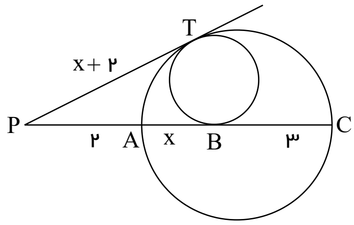
۴ گزینه ۲ می‌دانیم از نقطهٔ P خارج دایرهٔ کوچک‌تر، می‌توان دو مماس با طول‌های مساوی بر آن رسم کرد. بنابراین با فرض $AB = x$، داریم:

$$PT = PB = x + ۲$$

حال طبق روابط طولی در دایرهٔ بزرگ‌تر خواهیم داشت:

$$PT^{۲} = PA\cdot PC \Rightarrow (x+۲)^{۲} = ۲(x+۵) \Rightarrow x^{۲}+۴x+۴ = ۲x+۱۰ \Rightarrow x^{۲}+۲x-۶=۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۲\pm\sqrt{۴+۲۴}}{۲} = -۱\pm\sqrt{۷} \Rightarrow x=\sqrt{۷}-۱ \text{ (ق ق)}$$

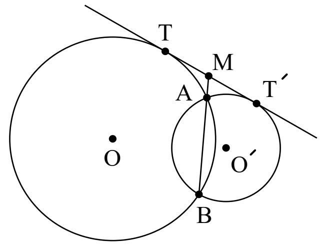


۵ **گزینه ۲** طبق فرض $AM = ۳$، $OO' = ۱۶$، $R = ۱۰$ و $R' = ۸$؛ طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R-R')^{۲}} \Rightarrow TT' = \sqrt{۲۵۶-۴} = \sqrt{۲۵۲} = ۶\sqrt{۷}$$

می‌دانیم: امتداد وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع، از وسط مماس مشترک خارجی دو دایره می‌گذرد بنابراین داریم:

$$MT = MT' = \frac{TT'}{۲} = ۳\sqrt{۷}$$



حال طبق روابط طولی در دایره داریم:

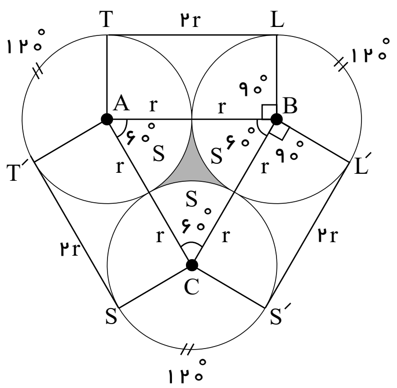
$$MT^{۲} = MA\cdot MB \Rightarrow ۶۳ = ۳(AB+۳) \Rightarrow AB = ۱۸$$

از آنجا که وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع (AB) بر خط‌المرکزین (OO') عمود است، داریم:

$$\underset{OAO'B}{S} = \frac{۱}{۲}AB\times OO' = \frac{۱}{۲}\times ۱۸\times ۱۶ = ۱۴۴$$

۶ **گزینه ۳**

مطابق شکل هرگاه سه دایره به مراکز A، B و C به شعاع r دوبه‌دو مماس باشند، مساحت ناحیهٔ رنگی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$\begin{cases} S_{\text{قطاع}} = \frac{۶۰}{۳۶۰}\pi r^{۲} = \frac{۱}{۶}\pi r^{۲} \\ \underset{ABC}{S} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^{۲} = \sqrt{۳}r^{۲} \end{cases} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \underset{ABC}{S} - ۳S = \sqrt{۳}r^{۲} - \frac{۱}{۲}\pi r^{۲} = r^{۲}(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$$

طول نخ نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L\hat{B}L' = ۳۶۰^{\circ} - (۹۰^{\circ}+۶۰^{\circ}+۹۰^{\circ}) = ۱۲۰^{\circ} \Rightarrow \text{طول کمان } LL' = \frac{۱۲۰}{۳۶۰}\times ۲\pi r = \frac{۲\pi r}{۳} \Rightarrow \text{طول کمان } SS' = \text{طول کمان } TT' = \frac{۲\pi r}{۳}$$

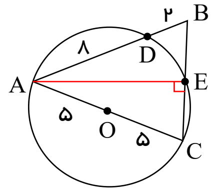
$$\Rightarrow \text{مجموع این سه کمان} = ۲\pi r \Rightarrow \text{طول نخ} = ۲\pi r + ۳\times ۲r \Rightarrow \text{طول نخ} = ۲\pi r + ۶r$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \text{طول نخ} = ۲\pi r + ۶r = ۸(\pi+۳) = ۸\pi + ۲۴ \Rightarrow r = ۴ \\ S_{\text{رنگی}} = r^{۲}(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}) = ۱۶(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}) = ۱۶\sqrt{۳} - ۸\pi \end{cases}$$

۷ **گزینه ۱** طبق شکل از آنجا که AC قطر دایره است پس زاویهٔ محاطی $A\hat{E}C = ۹۰^{\circ}$ بوده و این یعنی AE ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC است $(AB = AC)$

پس AE میانه بوده و درنتیجه E نقطهٔ وسط ضلع BC است و داریم:



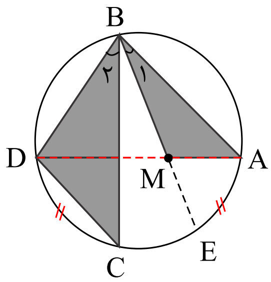
$$BE=\frac{BC}{۲}\quad (۱)$$

$$AC=۲R=۲\times۵=۱۰\xrightarrow{AB=AC}AB=۱۰\Rightarrow AD=۸$$

حال طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$BE\cdot BC=BD\cdot BA\xrightarrow{\text{طبق (۱)}}\frac{BC}{۲}\times BC=۲\times۱۰\Rightarrow BC^۲=۴۰\Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۰}$$

۸ **گزینه ۲** با رسم پاره‌خط BD، نتیجه می‌گیریم که دو مثلث BDC و ABM متشابه‌اند، زیرا:

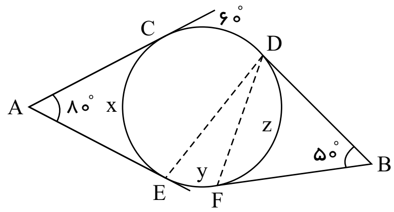


$$\begin{cases}\hat{B}_۱=\frac{\widehat{AE}}{۲}\ ,\ \hat{B}_۲=\frac{\widehat{CD}}{۲}\xrightarrow{\widehat{AE}=\widehat{CD}}\hat{B}_۱=\hat{B}_۲\\ \hat{C}=\hat{A}=\frac{\widehat{BD}}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}}\overset{\triangle}{B\hat{D}C}\sim\overset{\triangle}{A\hat{B}M}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{CD}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{AM}{۳}\Rightarrow AM=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۹ **گزینه ۳**

می‌دانیم اگر طول وتری از یک دایره برابر شعاع آن دایره باشد، اندازهٔ کمان متناظر با آن وتر برابر ۶۰° است، پس $\widehat{CD}=۶۰^\circ$. با توجه به فرض و شکل داریم:

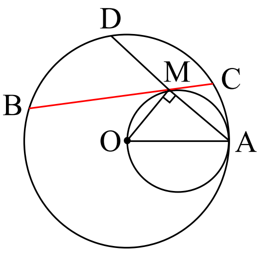


$$\begin{rcases}\hat{B}=\frac{(۶۰^\circ+x+y)-z}{۲}=۵۰^\circ\Rightarrow x+y-z=۴۰^\circ\\ \hat{A}=\frac{(۶۰^\circ+y+z)-x}{۲}=۸۰^\circ\Rightarrow y+z-x=۱۰۰^\circ\end{rcases}$$

$$\xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی}}۲y=۱۴۰^\circ\Rightarrow y=۷۰^\circ\Rightarrow(\text{محاطی})\ E\hat{D}F=\frac{y}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

۱۰ **گزینه ۲**

اگر از نقطهٔ M به نقاط O و A وصل کنیم در این‌صورت زاویهٔ $\hat{M}$ قائمه خواهد بود زیرا محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد. از آنجا که OM بر وتر AD عمود است پس $MA=MD$ و طبق روابط طولی در دایره داریم:

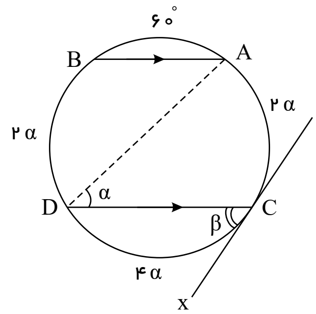


$$MB\times MC=MA\times MD\xrightarrow{MA=MD}MB\times MC=MA^۲$$

۱۱ **گزینه ۴**

چون AB برابر شعاع دایره است، پس کمان متناظر با آن ۶۰ درجه است، یعنی: $\widehat{AB}=۶۰^\circ$

همچنین طبق فرض داریم:



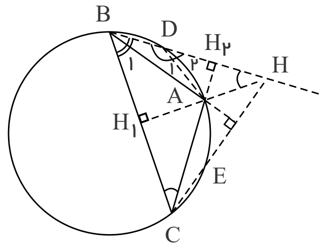
$$\begin{cases}AB||CD\Rightarrow\widehat{BD}=\widehat{AC}\\ \text{محاطی}:\ \hat{D}=\frac{\widehat{AC}}{۲}=\alpha\end{cases}\Rightarrow\widehat{BD}=\widehat{AC}=۲\alpha$$

$$\text{ظلی}:\ D\hat{C}X=\frac{\widehat{CD}}{۲}=\beta\xrightarrow{\beta=۲\alpha}\widehat{CD}=۴\alpha$$

$$\text{مجموع کمان‌های دایره}=۶۰^\circ+۲\alpha+۲\alpha+۴\alpha=۳۶۰^\circ\Rightarrow۸\alpha=۳۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{۷۵^\circ}{۲}\Rightarrow\widehat{BD}=۲\alpha=۷۵^\circ$$

۱۲ گزینه ۳ می‌دانیم در هر مثلث، ارتفاع‌ها هم‌رسند، پس امتداد ارتفاع AH_1 نیز از H می‌گذرد.
داریم:

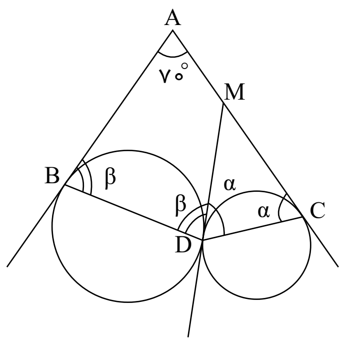


$$\begin{cases} \overset{\triangle}{BH_1}H : A\hat{H}D + \hat{B}_1 = ۹۰^\circ \\ \overset{\triangle}{BC}H_۲ : \hat{C} + \hat{B}_1 = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\hat{H}D = \hat{C} \qquad (*)$$

در گزینه‌ها، خبری از $\hat{C}$ نیست، پس باید به دنبال زاویهٔ معادل $\hat{C}$ باشیم. در چهارضلعی محاطی $ACBD$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{D}_1 + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_۲ \xrightarrow{(*)} A\hat{H}D = \hat{D}_۲ = A\hat{D}H$$

۱۳ گزینه ۴ در نقطهٔ D، MD مماس بر دایره‌ها می‌باشد. داریم:



$$M\hat{D}C = M\hat{C}D = \alpha = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \text{ ظلی}$$

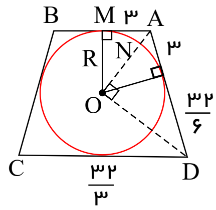
$$A\hat{B}D = M\hat{D}B = \beta = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \text{ ظلی}$$

$$ABDC:\ ۷۰^\circ + \beta + \beta + \alpha + \alpha = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۲۹۰^\circ}{۲} = ۱۴۵^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = ۱۴۵^\circ$$

۱۴ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیط بر دایره به شعاع R، قطر دایرهٔ واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است؛ یعنی $۴R^۲ = AB \times CD$، پس داریم:



$$۴R^۲ = ۶ \times \frac{۳۲}{۳} \Rightarrow R^۲ = ۱۶ \Rightarrow R = ۴$$

از طرفی اگر از A به مرکز O وصل کنیم تا دایره را در N قطع کند آنگاه AN کوتاه‌ترین فاصلهٔ A تا دایره است.

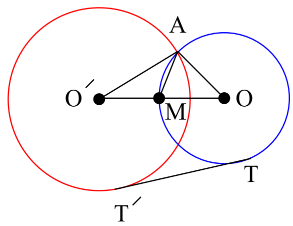
در مثلث OMA داریم $OA^۲ = R^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OA = ۵$ پس:

$$AN = OA - R = ۱$$

۱۵ گزینه ۳ با توجه به فرض و شکل زیر داریم $AM = \frac{۱}{۲}OO'$، پس مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و وتر OO' در این مثلث قائم‌الزاویه برابر $\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$ می‌شود.

اندازهٔ مماس مشترک خارجی در این دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۲۵ - ۱} = ۲\sqrt{۶}$$

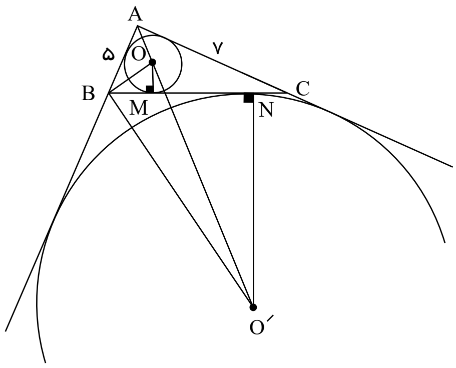


۱۶ گزینه ۴ در چهارضلعی $HOH'C$ دو زاویهٔ مقابل مکمل یکدیگر هستند، پس داریم :

$$\left.\begin{matrix} H\hat{O}H' + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ A\hat{O}D + H\hat{O}H' = ۱۸۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\hat{O}D = \hat{C} \\ \hat{C} = A\hat{D}O = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

۱۷ گزینه ۳ محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A و نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B (نقاط O و O') به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A

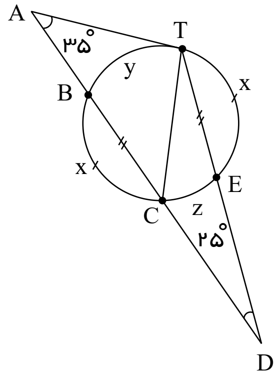
هستند. همچنین اندازهٔ تصویر قائم OO' بر روی ضلع BC برابر MN است. داریم:



$$\begin{aligned} MN &= BN - BM = (P-c)-(P-b) \\ &= b - c = ۷ - ۵ = ۲ \end{aligned}$$

۱۸ گزینه ۳

وترهای BC و TE از مرکز دایره به یک فاصله هستند پس کمان‌های نظیر آنها باهم برابرند. با توجه به شکل داریم:



$$\widehat{BC} = \widehat{TE} = x$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{x+z-y}{۲} = ۳۵^\circ \to x+z-y = ۷۰^\circ \\ \hat{D} &= \frac{y-z}{۲} = ۲۵^\circ \to y - z = ۵۰^\circ \end{aligned}\right\} \to x = ۱۲۰^\circ$$

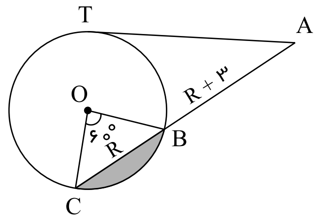
$$\left.\begin{aligned} \text{مجموع کمان‌ها} &= y+z+۲۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ \to y+z = ۱۲۰^\circ \\ y-z &= ۵۰^\circ \end{aligned}\right\} \to ۲y = ۱۷۰^\circ \to y = ۸۵^\circ \;,\; z = ۳۵^\circ$$

اندازهٔ زاویهٔ محاطی $C\hat{T}E$ برابر می‌شود با:

$$C\hat{T}E = \frac{z}{۲} = \frac{۳۵^\circ}{۲} = ۱۷/۵^\circ$$

۱۹ گزینه ۲

طبق فرض و روابط طولی در دایره داریم:



$$AB = BC = ۳ \xrightarrow{BC=R} AB = R + ۳$$

$$AT^۲ = AB \times AC \to (۳\sqrt{۱۵})^۲ = (R+۳)\times(۲R+۳) \to ۱۳۵ = ۲R^۲ + ۶R + ۳R + ۹$$

$$\to ۲R^۲ + ۹R - ۱۲۶ = ۰$$

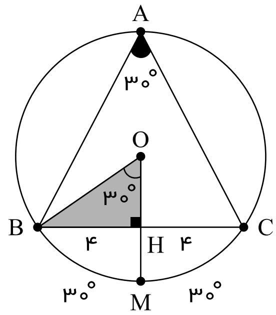
$$R = \frac{-۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۴(۲)(-۱۲۶)}}{۲\times۲} = \frac{-۹\pm۳۳}{۴} \xrightarrow{R>۰} R = \frac{۲۴}{۴} = ۶$$

در نتیجه:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{BOC}} = \frac{۶۰}{۳۶۰}\times\pi\times۶^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۶^۲ = ۶\pi - ۹\sqrt{۳}$$

۲۰ گزینه ۳

از مرکز دایرهٔ محیطی (O) عمود OH را بر ضلع BC وارد می‌کنیم. داریم:



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \to ۳۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \to \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BOH} : \sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{OB} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{OB} \to OB = ۸$$ (شعاع دایرهٔ محیطی)